UMA PROPOSTA METODOLÓGICA NO PROCESSO ENSINO E APRENDIZAGEM DE MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UMA CONTRIBUIÇÃO DE LEONARD EULER NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG

A METHODOLOGICAL PROPOSAL IN THE PROCESS OF MATHEMATICS TEACHING AND LEARNING IN BASIC EDUCATION: A CONTRIBUTION OF LEONARD EULER TO THE SOLUTION OF THE SEVEN BRIDGES PROBLEM OF KÖNIGSBERG

Edel Alexandre Silva Pontes
Instituto Federal de Alagoas - Brasil
E-mail: edel.pontes@ifal.edu.br

RESUMO

Diversos enigmas ou problemas matemáticos são propostos desde antiguidade e são responsáveis em estimular crianças, jovens e adultos, em busca de uma solução real e verdadeira. O suíço Leonard Euler é considerado um dos maiores matemático de todos os tempos, devido aos seus inúmeros trabalhos desenvolvidos em diversas áreas da matemática. O surgimento da teoria dos grafos deve-se a Euler com a publicação da solução do problema das sete pontes de Königsberg. Este artigo objetivou: (i) apresentar a solução sugerida por Euler para o problema das sete pontes Königsberg, (ii) sugerir uma prática pedagógica para o ensino de matemática na educação básica através dos grafos, e (iii) propor a inclusão da teoria dos grafos nos livros didáticos do ensino médio. A importância dos desafios matemáticos no processo de ensino e aprendizagem de matemática é extremamente fundamental para o desenvolvimento intelectual do estudante envolvido.

Palavras-chave: Leonard Euler. Pontes de Königsberg. Grafos. Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Several puzzles or mathematical problems have been proposed since ancient times and are responsible for stimulating children, young people and adults, in search of a real and true solution. The Swiss Leonard Euler is considered one of the greatest mathematician of all time, due to his numerous works developed in several areas of mathematics. The emergence of the graph theory is due to Euler with the publication of the solution of the problem of the seven bridges of Königsberg. This paper aims to: (i) present the solution suggested by Euler for the problem of the seven bridges Königsberg, (ii) suggest a pedagogical practice for the teaching of mathematics in basic education through graphs, and (iii) propose the inclusion of the theory of graphs in high school textbooks. The importance of mathematical challenges in the process of teaching and learning mathematics is extremely critical to the intellectual development of the student involved.

Keywords: Leonard Euler. Bridges of Königsberg. Graphs. Mathematics Teaching.

1. INTRODUÇÃO

Durante a evolução da humanidade diversos enigmas matemáticos foram apresentados no propósito de encontrar alguma mente brilhante que pudesse determinar a solução do problema e, consequentemente, desenvolvesse um método geral para a explicação do modelo. Os enigmas ou problemas matemáticos, durante séculos, são responsáveis em estimular crianças, jovens e adultos, em busca de uma solução real e verdadeira. "A Resolução de Problemas justifica-se em compreender o mundo das formas, das medidas, dos números e das probabilidades, a partir da arte de resolver problemas matemáticos" (PONTES, 2018b, p.45).

Muitas vezes, na Educação Básica, defrontamos com diversos problemas de matemática onde a solução nem sempre é imediata. Os constantes desafios dos problemas de matemática representam uma motivação a mais no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Segundo Groenwald (2014) as atividades didáticas como a resolução de enigmas ou problemas matemáticos são extremamente fundamentais para estimular o interesse do aluno pela matemática e para aprimorar seu raciocínio lógico, fazendo com que esses aprendizes sejam capazes de manipular conceitos e propriedades de maneira clara e objetiva. Para Pontes (2017, p.471), "o raciocínio lógico matemático deve ser estimulado para que o aprendiz possa processar o conteúdo de forma mais rápida".

Este trabalho objetivou: (i) apresentar a solução sugerida por Leonard Euler para o problema das sete pontes de Königsberg; (ii) sugerir uma proposta pedagógica para que a Teoria dos Grafos seja trabalhada na Educação Básica, nível médio; e (iii) propor a possibilidade de incluir teoria dos grafos, como material complementar, nos livros didáticos do ensino médio

Este problema das sete pontes de Königsberg está vinculado à Teoria dos Grafos. É importante salientar que mesmo o aluno não dispondo dos pré-requisitos para a compreensão da Teoria dos Grafos, este tipo de atividade vem a fortalecer o interesse do aprendiz em prosseguir nos estudos dos conceitos e aplicações de matemática.

> As pesquisas nas áreas de Educação Matemática, com destaque no processo de ensino e aprendizagem de matemática, demonstram que o individuo aprendiz quando envolvido em situações que atiçam sua curiosidade, ele aprende na ação, pois se sente atraído e motivado para novas descobertas. [...] Essa nova maneira de olhar a matemática é necessária para adaptar os avanços tecnológicos do mundo moderno ao individuo da era tecnológica. (PONTES, 2018a, p.164).

A Teoria dos Grafos teve inicio, em 1736, com a publicação da solução do matemático suíço Leonard Euler (1707-1783) para o problema das sete pontes de Königsberg, na qual apresentou um método geral para resolução de grafos atravessáveis. Königsberg era uma cidade universitária da Prússia (atualmente Rússia) banhada pelo rio Pregel, onde havia duas grandes ilhas e sete pontes, conforme ilustração da figura 1. Em 1946, os soviéticos rebatizaram de Caliningrado e o rio, hoje, é chamado Pregolya. Atualmente, apenas duas pontes são da época.

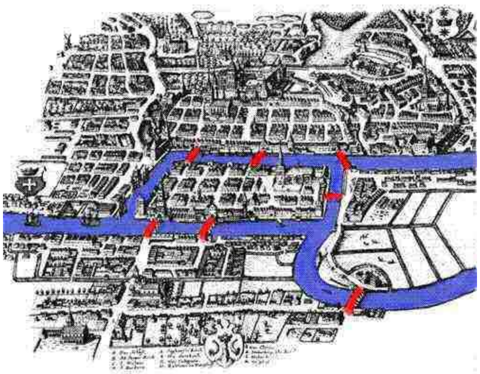

Figura 1: As sete pontes de Königsberg.

Fonte: https://www.google.com.br

No século XVIII a população de Königsberg perguntava se era possível atravessar as sete pontes sem passar duas vezes por qualquer uma delas. Nos dias ensolarados de domingo os habitantes tentavam encontrar uma maneira de atravessar as sete pontes sem passar duas vezes pelo mesmo lugar, e as tentativas eram sempre em vão. Apesar de que, muitos deles, acreditavam ser possível encontrar tal caminho. Em 1736, na Academia de Ciências Russa de São Petersburgo, Leonard Euler provou que não era possível fazer tal caminho.

2. TEORIA DOS GRAFOS

A teoria dos grafos é um ramo da matemática utilizada em variados campos da ciência, como a Física, Química, Biologia, Computação, Pesquisa operacional, Estatística, Engenharia, Psicologia, Sociologia, dentre outros. "Desenvolvimentos recentes na Matemática, particularmente nas suas aplicações, deram grande importância a tal teoria. [...] A Teoria de Grafos é classificada como um ramo da Topologia, mas está fortemente ligada à Álgebra e à Teoria de Matrizes". (COSTA, 2011, p.15). Segundo Vulcani (2015) um grafo é um modelo matemático, uma estrutura interessante, que serve para representar coleções de objetos, chamados vértices e arestas.

> A palavra Grafo tem vários significados. Em linguagem não matemática, refere-se a um método de representação de uma idéia ou conceito, por meio de uma ilustração ou por escrito. Tanto em matemática como na linguagem corrente, costuma referir-se a um diagrama usado para exibir o relacionamento entre duas grandezas. (SCHEINERMAN, 2003, p. 381).

Definição 1: Um grafo convexo finito $G(V_G, A_G)$, Figura 2, consiste em um conjunto V_G cujos elementos são chamados de vértices de G e um conjunto A_G de pares não ordenados de vértices, chamados de arestas de G.

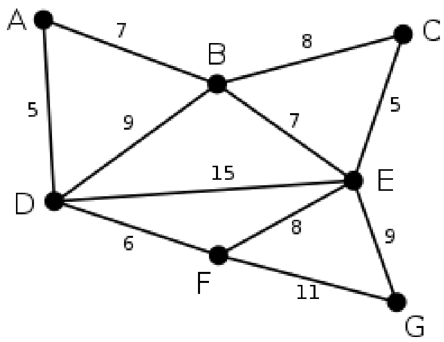

Figura 2: Um grafo convexo finito $G(V_G, A_G)$

Fonte: https://www.google.com.br

Definição 2: Seja $G(V_G, A_G)$ um grafo conexo finito. A matriz $M = (a_{ij}) \in M_n(\Re)$ tal que $M = \begin{cases} a_{ij} = 1; & (V_i, V_j) \in G \\ a_{ij} = 0; & (V_i, V_j) \notin G \end{cases}$ é chamada matriz associada de um grafo $G(V_G, A_G)$.

A matriz associada do grafo da figura 2 é dada por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Seja $G(V_G, A_G)$ um grafo conexo finito. Uma trilha euleriana é uma trilha que passa por todas as arestas de um grafo $G(V_G, A_G)$. Um grafo é euleriano se possui uma trilha euleriana fechada. "A partir do conceito de trilha euleriana, podemos resolver vários problemas relacionados a desafios e jogos que envolvem raciocínio lógico" (VULCANI, 2015, p. 61).

O grau de um vértice ($grau(v)$) de um grafo é o número de arestas incidentes para com o vértice. Um laço é uma aresta que conecta um vértice a ele mesmo. Em um laço, o grau é contado duas vezes.

Teorema 1: (Teorema de EULER) Seja $G(V_G, A_G)$ um grafo conexo euleriano, então $grau(v)$ é par $\forall v \in V_G$.

Prova: Suponha que $G(V_G, A_G)$ tenha uma trilha fechada de comprimento $|A_G|$. Cada vez que a trilha passa por um vértice V_G utiliza duas novas arestas, uma para entrar e uma para sair. Logo o grau de cada vértice deve ser par.

Corolário 1: Qualquer grafo conexo finito $G(V_G, A_G)$ com dois vértices impares é atravessável. Uma trilha atravessável pode começar em qualquer vértice e terminar no outro vértice impar.

Prova: Seja $G(V_G, A_G)$ um grafo conexo. Suponha que $G(V_G, A_G)$ contenha uma trilha euleriana T. Sejam x e y os extremos desta trilha. Logo, todo vértice dessa trilha, exceto x e y, têm grau par.

3. A SOLUÇÃO DE LEONARD EULER

As sete pontes de Königsberg foi o primeiro grafo da história e Leonard Euler transformou os caminhos em retas e suas intersecções em pontos. Em outros termos, as ilhas e as margens representavam os vértices e as pontes às arestas. A Figura 3 ilustra as pontes de Königsberg na forma de um grafo. O famoso passeio de Königsberg era sair de qualquer ponto da cidade percorrer todos os lugares e passar por cada ponte uma única vez.

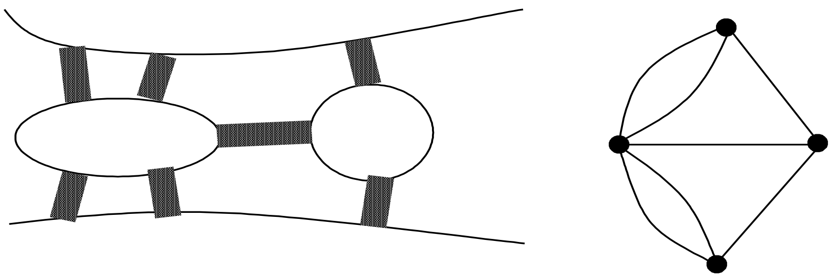

Figura 3: O Problema das Pontes de Königsberg.

Fonte:<http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/grafos.doc>

Seja $G(V_G, A_G)$ um grafo conexo finito que representa a cidade de Königsberg, conforme Figura 3. A matriz associada ao grafo G é:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Este grafo possui: quatro vértices e sete arestas.

O problema a ser resolvido: se é possível o passeio de Königsberg? Euler baseou-se sua resposta nas seguintes descobertas que fez:

- Se um grafo $G(V_G, A_G)$ contém somente vértices pares, então $G(V_G, A_G)$ é atravessável, isto é, começando e acabando no mesmo ponto. (Teorema 1)
- Se um grafo $G(V_G, A_G)$ contém, dois vértices ímpares, então $G(V_G, A_G)$ é atravessável, isto é, começa em qualquer vértice e termina no outro vértice impar. (Corolário 1)
- Se uma grafo $G(V_G, A_G)$ contém 2n vértices ímpares, onde n é um número inteiro qualquer, então para atravessá-lo será necessário n passagens distintas por uma mesma linha.

O grafo $G(V_G, A_G)$ que representa o passeio pelas sete pontes de Königsberg se observa que os quatro vértices são todos ímpares, ou seja, $grau(v)$ é impar, $\forall v \in V_G$. Como $2n = 4 \Rightarrow n = 2$, daí, seriam necessárias duas passagens distintas por uma das linhas para atravessar o grafo $G(V_G, A_G)$. Portanto, não é possível fazer o passeio de Königsberg.

4. SUGESTÃO METODOLÓGICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA

Observa-se que a Teoria dos Grafos, particularmente o problema das sete pontes de Königsberg, vem ao encontro das propostas metodológicas para o ensino de matemática sugerido nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), vale destacar: o desenvolvimento do raciocínio lógico, a capacidade de tomar decisões acertadas, saber estabelecer conexões entre diversos conceitos matemáticos, o estímulo à imaginação, a interpretação de figuras matemáticas, a formalização de hipóteses e conjecturas, a previsão de resultados e a aplicação de modelos matemáticos numa situação real. "No Ensino Médio, a aprendizagem de Matemática se torna mais eficiente quando o aluno é capaz de compreender conceitos, estabelecer estratégias, interpretar modelos, desenvolver trabalhos em grupo ou de forma solitária, resolver problemas e tomar decisões" (PONTES, 2018b, 52).

Para Yanez (2018) resolver problemas de matemática é fundamental para o desenvolvimento pessoal e para o desenvolvimento do pensamento matemático, pois é uma maneira de fortalecer a criatividade e aprimorar a compreensão de modelos muitas vezes complexos.

> A modelação de um problema por um grafo, quando adequado, torna mais acessível a sua compreensão, não apenas porque permite uma visualização da situação problemática mas também porque permite organizar metodologicamente a informação importante para a sua resolução. Por outro lado, o conhecimento de alguns resultados, teoremas conhecidos, permite obter de modo simples, por vezes imediato, a sua resposta (MATOS, 2013, p.67).

Diante disto, uma proposta metodológica bastante motivadora para o ensino de grafos no ensino médio seria propor situações onde o aluno aprendiz pudesse identificar grafos atravessáveis ou não, através do teorema de EULER. O objetivo da aula seria apresentar o conceito de grafos atravessáveis e suas propriedades, para estudantes do ensino médio, de forma que eles pudessem encontrar a solução correta dos problemas propostos. Sugerimos, neste trabalho, duas propostas metodológicas com o uso do Teorema de EULER que podem ser utilizadas no ensino médio:

Proposta um: Uma sugestão, além do problema das sete pontes de Königsberg, seria tentar construir a casa da figura 4, sem retirar a ponta do lápis do papel e que não pudesse passar duas vezes pela mesma aresta.

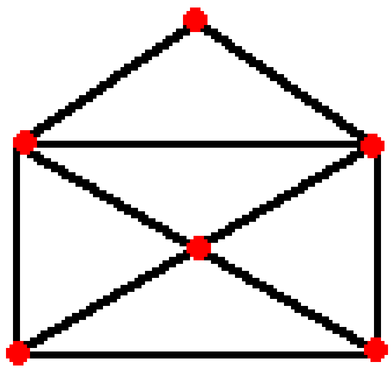

Figura 4: Grafos Eulerianos

Fonte: https://www.google.com.br

Com ajuda do professor, o aluno vai perceber, pelo Corolário 1, que todo grafo que possui dois vértices de grau ímpar e os outros de grau par: o grafo é atravessável ! Nota-se que o grafo possui seis vértices: um vértice de grau 2, três vértices de grau 4 e dois vértices de grau 3. Sua matriz associada ao grafo é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Portanto, se ele começar o passeio por um dos vértices inferiores (os ímpares) chegará a completar a missão.

Em um ambiente educacional os professores podem propor diversas situações práticas, através de grafos, onde o objetivo é fazer com que os alunos possam identificar se é possível atravessar um grafo sem repetir uma mesma aresta. Desta forma, esse tipo de atividade fortalece a motivação do aluno em aprender e aprimora seu desenvolvimento psicomotor e cognitivo. Nos dias atuais, o aluno aprendiz espera de seus mediadores uma prática pedagógica eficiente e motivadora para a construção do conhecimento.

Proposta 2: Uma segunda sugestão seria a utilização das 28 peças de um jogo de dominó, conforme Figura 5. Acompanhando a regra de um jogo de dominó, é possível dispor as 28 peças do dominó de tal maneira que possa formar uma trilha euleriana?

Figura 5: As 28 peças de um jogo de dominó.

Fonte: https://www.google.com.br

Neste desafio, inicialmente, podemos excluir as peças com igual número de pontos nas duas metades (*dobles*), desta forma teríamos 21 peças. Podemos representar este passeio através de um hexágono convexo regular, Figura 6, onde cada vértice representa uma das faces do dominó.

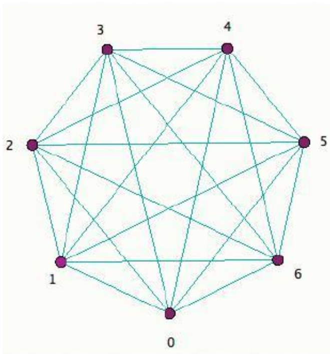

Figura 6: Hexágono convexo regular representando um grafo do jogo de dominó

Fonte: http://gazeta.spm.pt/getArtigo?gid=438

A matriz associada deste grafo é definida por:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Novamente com ajuda do professor, o aluno vai perceber que todos os vértices têm grau par, e pelo Teorema de Euler, o grafo é atravessável. Se considerarmos todas as peças do dominó, incluindo os *dobles,* teremos um grafo onde cada *doble* representa um laço no grafo, onde cada vértice terá grau oito e pelo Teorema de EULER, o grafo é atravessável. A matriz associada deste grafo será a matriz unitária de ordem sete.

> A Teoria dos Grafos tem a peculiaridade de ser, a um tempo, bela, simples e profunda. Mesmo como mera curiosidade matemática (vale sempre lembrar o problema das pontes de Königsberg, "onde tudo começou"), os grafos sempre chamam a atenção, inclusive do leigo. Explorar essa característica de uma ferramenta matemática tão importante acaba tornando-se dever do professor do ensino básico (NOGUEIRA, 2015, p.85)

Atividades desta natureza são extremamente válidas e interessantes, pelo motivo de aguçar a imaginação do aluno em busca da solução correta. O ensino de matemática torna-se prazeroso quando o aprendiz percebe o quanto está ciência explica os fenômenos do mundo em que ele vive.

Diante do exposto, espera-se que a teoria dos grafos, particularmente grafo atravessável, possa fazer parte de práticas complementares na educação básica, definindo uma nova base metodológica no processo de ensino e aprendizagem de matemática no intuito de minimizar as defasagens entre o mundo globalizado e digital da escola "tradicional".

5. TEORIA DOS GRAFOS COMO MATERIAL COMPLEMENTAR NOS LIVROS DIDÁTICOS DO ENSINO MÉDIO

Diante da evolução tecnológica do mundo moderno, diversos pesquisadores na área de educação matemática vêm propondo novas diretrizes no processo de ensino e aprendizagem de matemática. Um dos atores principais neste processo é o livro didático, que tem um papel imprescindível na construção de conhecimentos e saberes dos estudantes ainda na formação básica.

Um dos fatores de maior preocupação entre os pesquisadores é que o livro didático normalmente é escrito na concepção que o autor entende do processo ensino-aprendizagem. Está prática pode levar o professor a exercer um método de ensino de aulas expositivas, daquilo que o livro propõem e da resolução de exercícios propostos préestabelecidos pelo próprio livro. É importante lembrar que as atividades com o livro didático é um forte instrumento pedagógico como facilitador no processo de ensino-aprendizagem.

> O livro didático destina-se a dois leitores: o professor e o aluno, em que o professor é o transmissor e/ou o mediador dos conteúdos que estão nesses livros, e o aluno é o receptor de tais conteúdos. É através desses livros que o aluno vai aprender, construir e alterar significados, em relação a um padrão social, que a própria escola estabeleceu como projeto de educação, quando da adoção desse livro didático para utilização na escola (SILVA JUNIOR, 2007, p.16-17).

Diante desta inquietação, a proposta de implementar nos livros didáticos de matemática, nos finais de cada capítulo, um material complementar com propostas desafiadoras do conteúdo que foi estudado, pode ser extremamente motivador para o entendimento da teoria. Sob a luz do enfoque metodológico diversos livros de matemática da educação básica já trazem em seus capítulos propostas com material complementar para um melhor entendimento da teoria apresentada. Segundo Da Silva e Bôas (2019), o grande facilitador na aprendizagem de matemática para alunos da educação básica é a utilização do material didático, pois consegue deixar as aulas bem mais animadas e agradáveis, superando a formalidade que existe nesta disciplina.

Porém, se faz necessário que está prática seja uma constante nas bancas escolares e que possa torna-se uma referência como prática pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática.

> [...] o professor é o elemento chave, ele é de fato a pedra angular no processo de ensino, e portanto, a influência do livro didático em suas práticas está relacionada ao modo como este profissional vê e faz o uso desse instrumento no seu fazer pedagógico, pois é ele quem vai dar vida ao livro didático (TURÍBIO, 2015, p.135).

A inclusão da teoria dos grafos como atividade complementar nos livros de matemática da educação básica é bastante válida pelo motivo de aproximar essa nova geração de jovens e adolescentes, inseridos em um mundo digital, do ensino de matemática. A matemática tem um papel fundamental e de suma importância na construção de práticas pedagógicas eficientes que aproxime essa nova geração de aprendizes dos conteúdos teóricos e extremamente abstratos vistos na escola de educação básica.

Em face do exposto, venho através deste artigo propor a inclusão desta proposta sobre grafos atravessáveis e o Teorema de Euler e suas aplicações como material complementar nos capítulos finais do conteúdo sobre matrizes. Pode-se sugerir que a cada modelo de grafo euleriano o aluno aprendiz possa construir a matriz associada ao grafo proposto.

6. CONSIDERAÇÕES FINAIS

Apesar da formalidade da teoria matemática, os grafos possuem uma infinidade de problemas bastante curiosos e com respostas, muitas vezes, intuitivas. Abordagens desses temas, qualquer que seja o nível de ensino, podem facilitar o desenvolvimento do raciocínio dos estudantes. Encontrar a solução de um problema é sempre um desafio bastante prazeroso, principalmente, quando esses exercícios estão relacionados com o cotidiano. O passeio das sete pontes de Königsberg é um típico problema matemático que faz despertar nos estudantes o gosto para o estudo da matemática, fazendo com que eles possam criar motivação necessária para encarar essa ciência de modo diferente.

Faz-se necessário que o currículo de matemática no ensino médio se proponha a apresentar práticas do dia a dia do aprendiz de modo a transformar a “velha” matemática estática em um modelo amplo e dinâmico. A prática pedagógica para o ensino de matemática na Educação Básica deve ser respaldada em propostas que leve o aluno a enfrentar situações desafiadoras no intuito de gerar novos conhecimentos e saberes. Além disso, a utilização de material complementar nos livros didáticos da educação básica é um fator preponderante para minimizarmos as defasagens entre o que se ver do ponto de vista teórico e o que se faz do ponto de vista prático. Espera-se que este artigo possa contribuir no processo de ensino e aprendizagem de matemática, no fortalecimento do pensamento matemático, como também na formação do cidadão.

REFERÊNCIAS

CALLIOLI, Carlos A. et al. **Álgebra Linear e Aplicações**. 2. ed. São Paulo: Atual, 1978.

CARVALHO, Paulo, C, P. **Dois Problemas Sobre Grafos.** Disponível em:

< http://www.obm.org.br/export/sites/default/revista_eureka/docs/artigos/grafos.doc>. Acesso em: 30 dez. 2018.

COSTA, Polyanna Possani da. **Teoria dos grafos e suas aplicações**. 2011. Disponível em: < http://www.rc.unesp.br/tmelo/diss-polyanna.pdf >. Acesso em: 28 dez. 2018.

DA SILVA, Luciane Ribeiro; BÔAS, Jamille Vilas. CONTRIBUIÇÕES DO USO DE MANIPULÁVEIS COMO ESTRATÉGIA NA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS SOBRE O PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO. **Ensino em Foco**, v. 2, n. 4, p. 85-98, 2019.

GERSTING, Judith L. **Fundamentos Matemáticos Para a Ciência da Computação.** 4. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001.

GROENWALD, Claudia, L,**O. PENSAMENTO ARTIMÉTICO E PENSAMENTO ALGÉBRICO NO ENSINO FUNDAMENTAL**. Disponível em : < http://w3.ufsm.br/ceem/eiemat/Anais/arquivos/ed_4/MC/MC_Groenwald_Claudia.pdf >. Acesso em: 29 dez. 2018.

GROENWALD. Claudia, L,O. et. al. A história da matemática como recurso didático para o ensino da teoria dos números e a aprendizagem da matemática no ensino básico. **Paradigma,** v. 26, n. 2, Maracay dez. 2005.

LIPSCHUTZ, Seymour ; LIPSON, Marc. **Matemática Discreta.** 2. ed. Porto Alegre: Bookman, 2004.

MATOS, Ilda Maria Duarte de. **Teoria dos grafos no ensino básico e secundário**. 2013. Dissertação de Mestrado. Universidade de Aveiro.

NOGUEIRA, Daniel Klug. **Introdução à teoria dos grafos: proposta para o ensino médio.** 2015. Disponível em: < http://repositorio.unb.br/bitstream/10482/19363/1/2015_DanielKlugNogueira.pdf >. Acesso em: 28 dez. 2018.

PONTES, Edel Alexandre Silva. GRAFO ATRAVESSÁVEL: UMA CONTRIBUIÇÃO DE LEONARD EULER NA SOLUÇÃO DO PROBLEMA DAS SETE PONTES DE KÖNIGSBERG**. Revista Pesquisa Educacional**, v.2, n.2, p.1-5, 2009.

PONTES, Edel Alexandre Silva et al. Raciocínio lógico matemático no desenvolvimento do intelecto de crianças através das operações adição e subtração. **Diversitas Journal**, v. 2, n. 3, p. 469-476, 2017.

PONTES, Edel Alexandre Silva. A ARTE DE ENSINAR E APRENDER MATEMÁTICA NA EDUCAÇÃO BÁSICA: UM SINCRONISMO IDEAL ENTRE PROFESSOR E ALUNO. **Revista Psicologia & Saberes**, [S.l.], v. 7, n. 8, p. 163-173, jul. 2018. ISSN 2316-1124.

PONTES, Edel Alexandre Silva. Modelo de ensino e aprendizagem de matemática baseado em resolução de problemas através de uma situação-problema. **Revista Sítio Novo**, v. 2, n. 2, p. 44-56, 2018.

SCHEINERMAN, E,R. **Matemática Discreta: Uma Introdução**. São Paulo: Pioneira Thomson Learning, 2003.

SILVA JUNIOR, Clovis Gomes da. O LIVRO DIDÁTICO DE MATEMÁTICA E O TEMPO . **Revista de Iniciação Científica da FFC**, v. 7, n. 1, p.13-21, 2007.

TURÍBIO, Solange Ramos Teixeira et al. **As mudanças ocorridas no livro didático de matemática e a sua influência na prática pedagógica do professor**. 2015. Disponível em: < http://ri.ufmt.br/handle/1/647 >. Acesso em: 31 dez. 2018.

VULCANI, Renata de Lacerda Martins. Grafos Eulerianos e aplicações. - **Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática)** - Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2015. Disponível em: < http://repositorio.unicamp.br/bitstream/REPOSIP/306826/1/Vulcani_RenatadeLacerdaMartins_M.pdf > Acesso em: 31 dez. 2018.

YANEZ, Jose C. Resolución y formulación de problemas. **RENCIMA**, v.9, n.1, 2018.